



Cours 25 – 12/12/2024

11. Applications du solide indéformable

11.2. Mise en rotation d'un solide

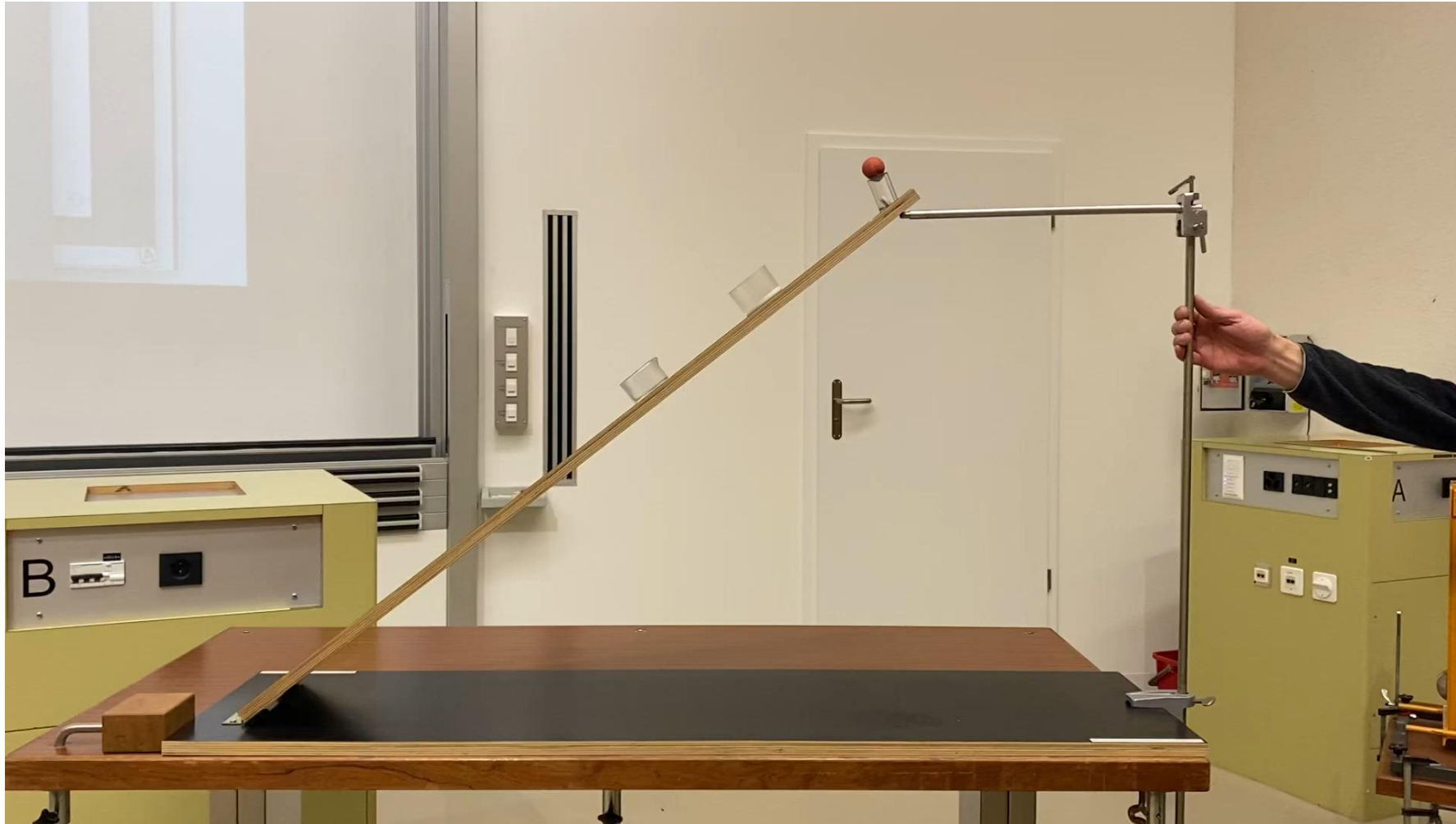
11.3. Moment d'inertie : exemples et applications



11.2. Mise en rotation d'un solide

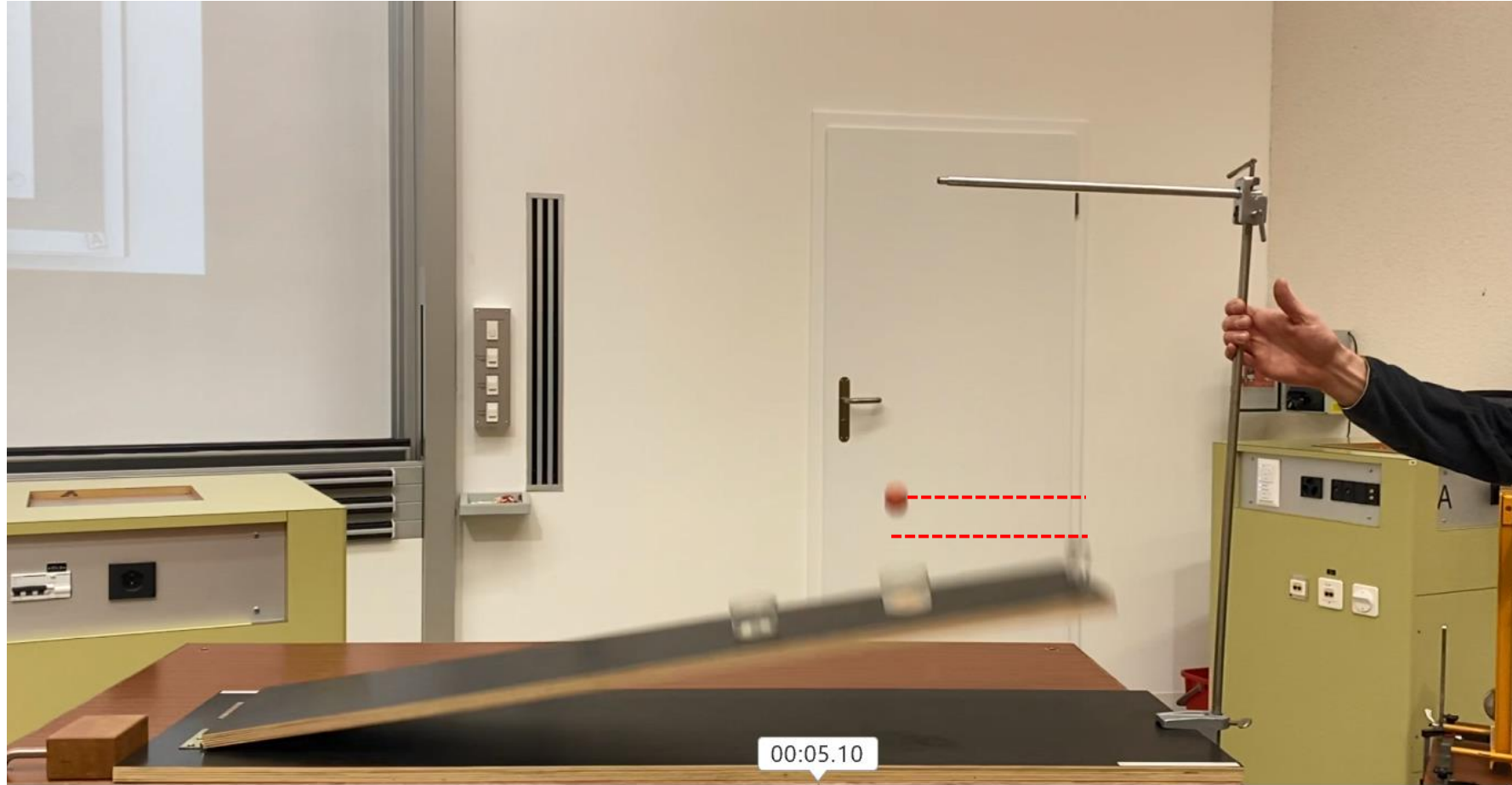


■ Accélération d'une planche qui pivote autour d'un axe



11.2. Mise en rotation d'un solide

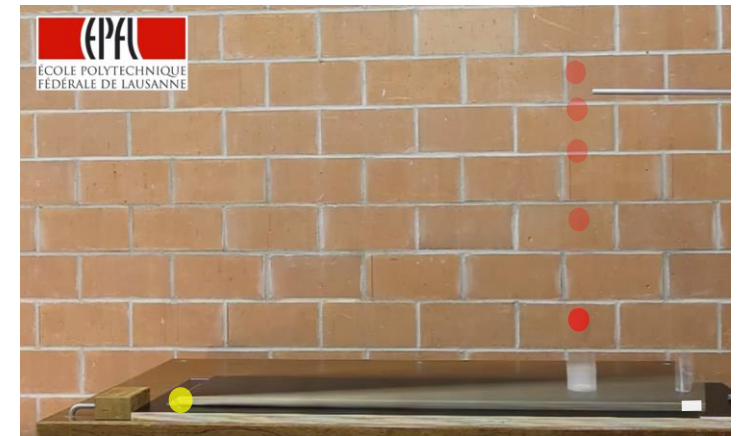
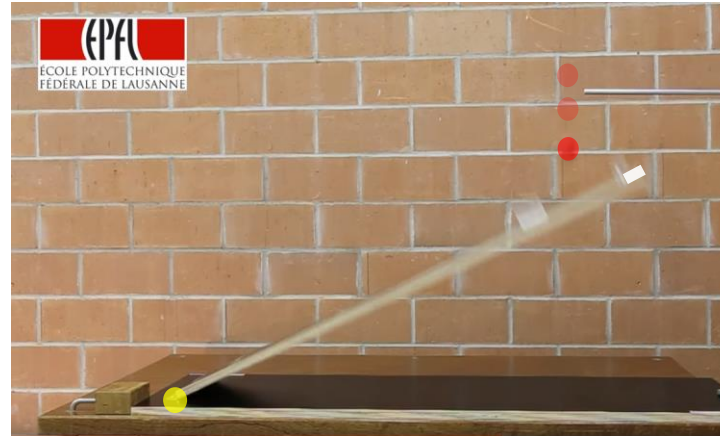
- Accélération d'une planche qui pivote autour d'un axe



11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Accélération d'une planche qui pivote autour d'un axe



Expérience : une balle (point rouge) repose sur un support au bout d'une planche (marque blanche) qui peut tourner autour d'un axe (point jaune) à l'une de ses extrémités. Lorsque la planche est lâchée, celle-ci pivote et la balle tombe sous l'effet de la pesanteur. On remarque que la balle ne touche plus la planche pendant sa chute et qu'elle arrive au sol après la planche

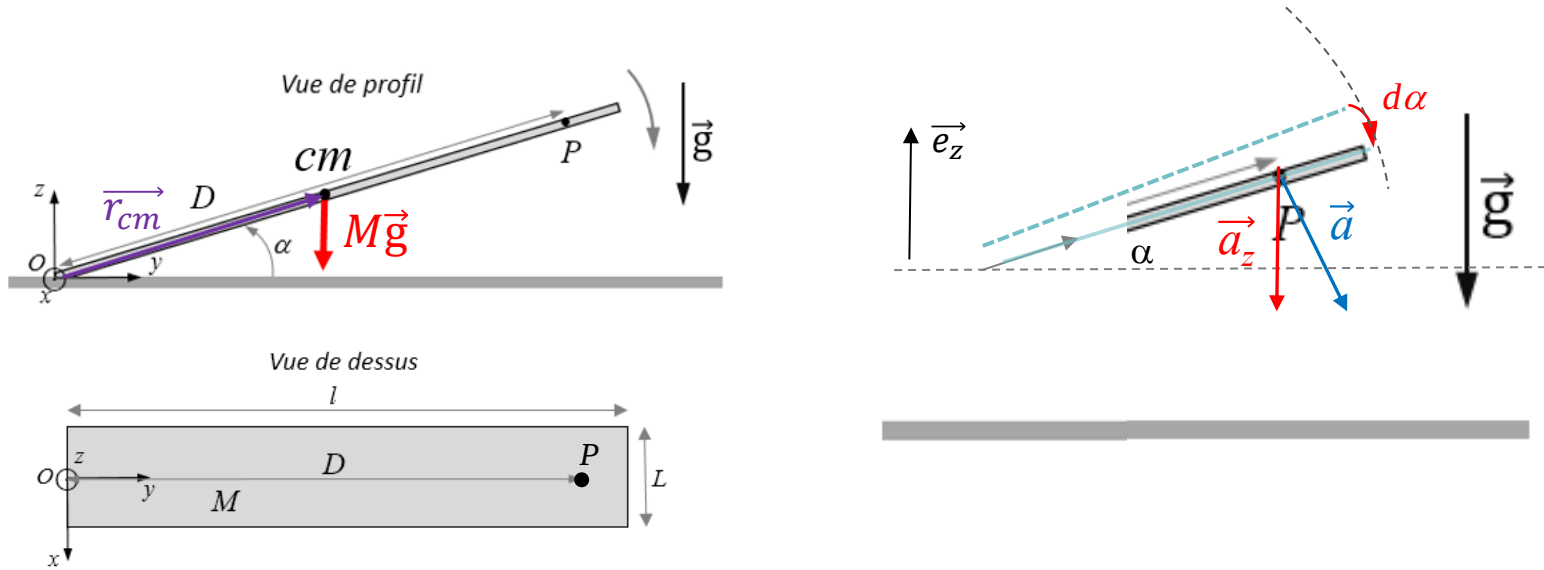
⇒ l'extrémité de la planche (marque blanche) accélère donc plus vite que la balle.

⇒ Calcul de l'accélération de l'extrémité de la planche

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Accélération d'une planche qui pivote autour d'un axe



On calcule l'accélération $\vec{a}$ d'un point P situé à une distance D de l'axe de rotation. Puis on projette cette accélération sur Oz et on la compare à g .

a) Accélération angulaire $\dot{\omega}$ quand on lâche la planche (à $t=0$)

- Moment du poids $\vec{\mathcal{M}}_O$ avec $\vec{p} = -Mg \vec{e}_z$ appliqué au centre de masse (à la distance $d_{cm} = \frac{l}{2}$) : $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \underbrace{(d_{cm} \cos \alpha \vec{e}_y + d_{cm} \sin \alpha \vec{e}_z)}_{\vec{r}_{cm}} \times \underbrace{(-Mg \vec{e}_z)}_{\vec{p}} = -gM \frac{l}{2} \cos \alpha \vec{e}_x$$

- Théorème du moment cinétique en O (ω la vitesse angulaire selon Ox avec $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_x$) :

$$\vec{\mathcal{L}}_O = I\vec{\omega} = -I\omega \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O \Rightarrow \frac{d(-I\omega \vec{e}_x)}{dt} = -gM \frac{l}{2} \cos \alpha \vec{e}_x \Rightarrow \boxed{\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{Ml}{2I} g \cos \alpha}$$

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Accélération d'une planche qui pivote autour d'un axe

$$\dot{\omega} = \frac{Ml}{2I} g \cos \alpha$$

b) Composante a_z à $t=0$ de l'accélération du point P

$\vec{a}$ en fonction de $\dot{\omega}$ (coordonnées polaires) : $\vec{a} = -D\omega^2 \vec{e}_\rho + D\dot{\omega} \vec{e}_\varphi$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

Au moment où on lâche la planche ($t=0$) : $\omega = 0$ soit $\vec{a} = D\dot{\omega} \vec{e}_\varphi$

On projette $\vec{a}$ sur Oz : $a_z = -D\dot{\omega} \cos \alpha$ avec $\dot{\omega}$ calculé en a) : $a_z = -\frac{Dl}{2I} Mg \cos^2 \alpha$

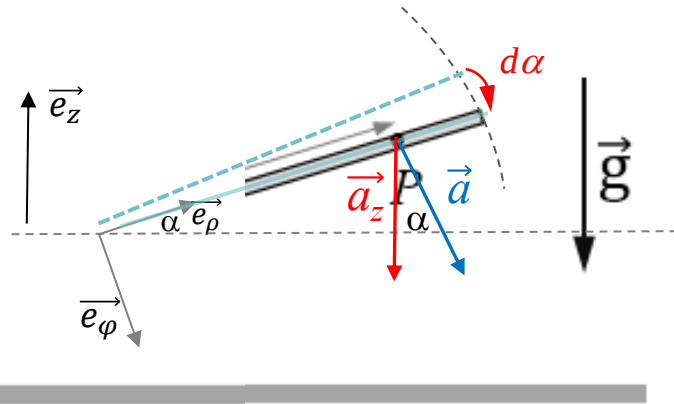
Avec le moment d'inertie de la planche $I = \frac{1}{3} Ml^2$:

$$a_z = -\frac{3D}{2l} g \cos^2 \alpha$$

On remarque que l'accélération augmente avec la distance D

$$\text{Pour } \alpha = 30^\circ \Rightarrow |a_z| > g \text{ pour } D > \frac{8}{9} l$$

accélération supérieure à g

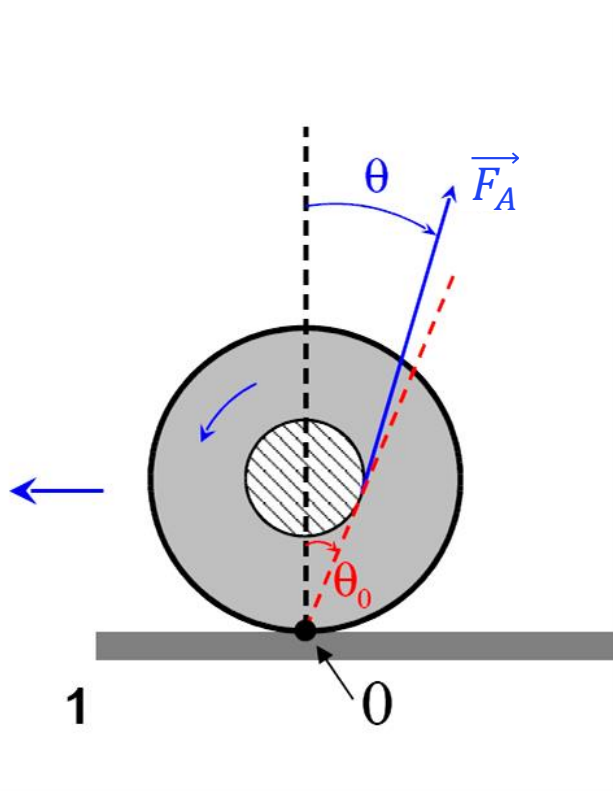


11.2. Mise en rotation d'un solide

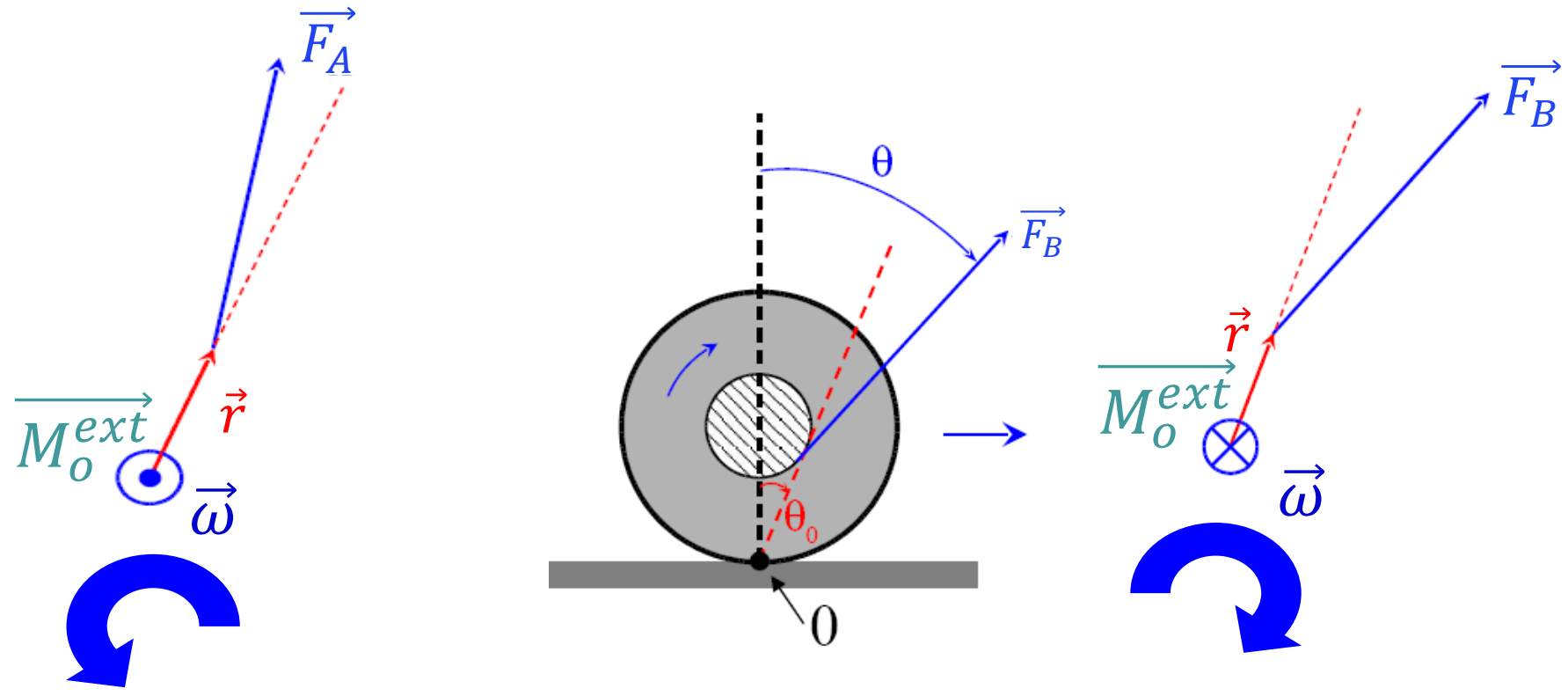


■ Mise en rotation de bobine

Bobine 1, cas 1



Bobine 1, cas 2



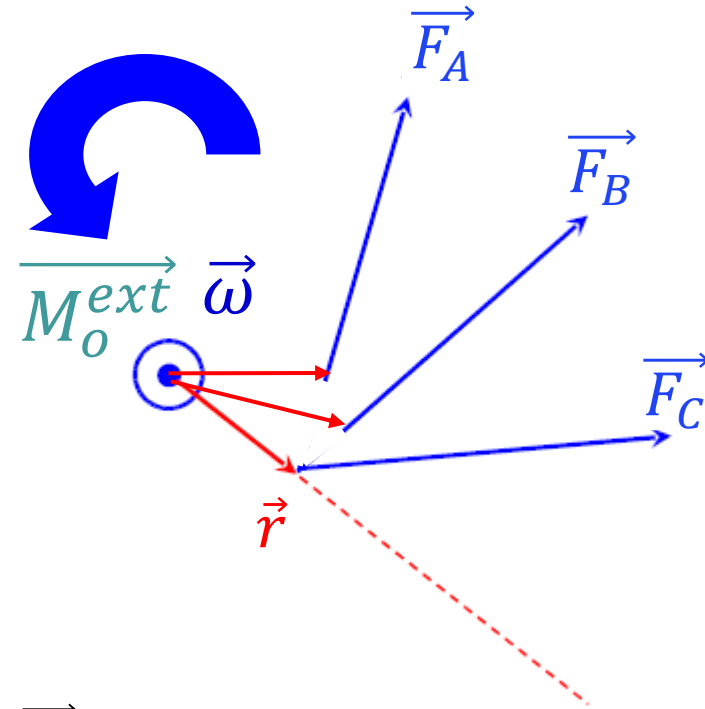
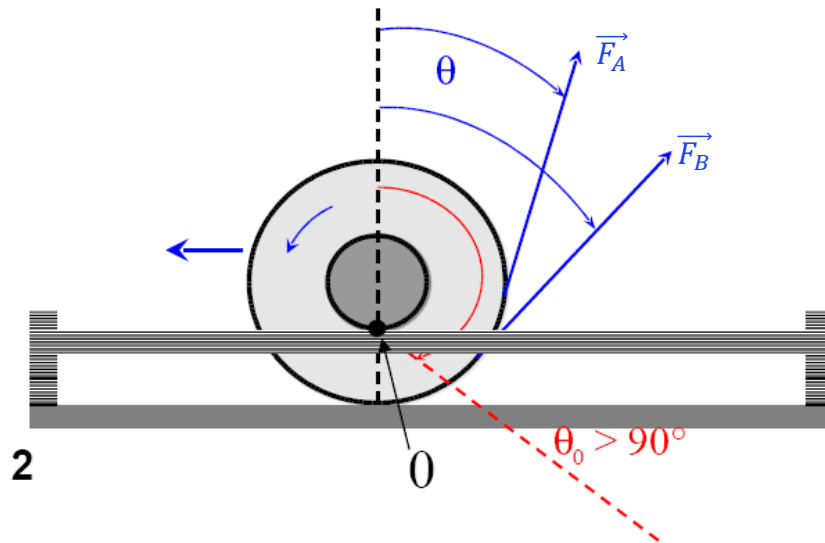
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext}$$

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Mise en rotation de bobine

Bobine **2**, cas 1 et 2



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext}$$

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Roue en rotation autour d'un axe : la meule

- Une meule en rotation exerce une force supérieure au poids de la roue

La roue de masse m tourne sans glissement à vitesse constante

Forces extérieures qui s'appliquent au centre de masse :

$\vec{N}$ réaction du sol

$\vec{R}$ force de « rappel »

$m\vec{g}$ le poids

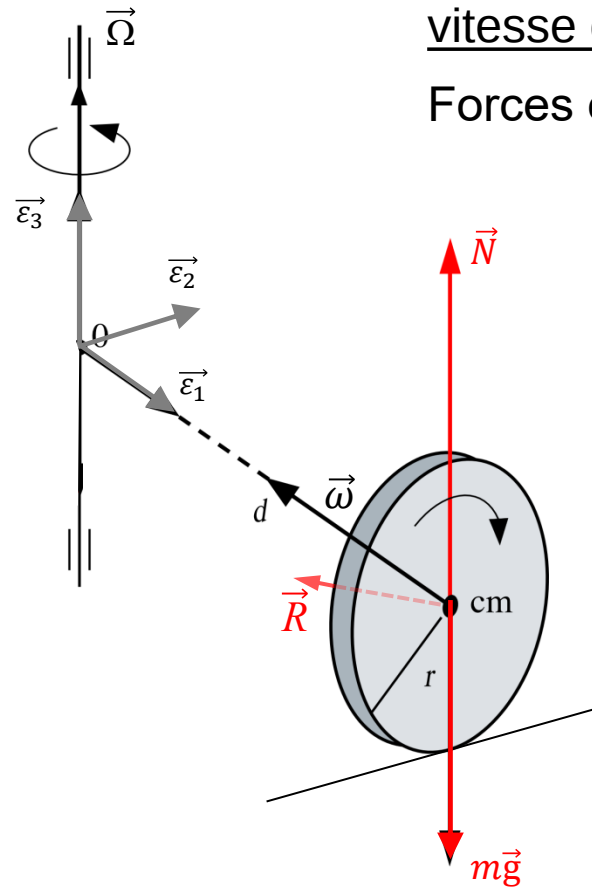
$$m \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{R} + \vec{N} + m\vec{g}$$

On projette dans un repère $O, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$

$$-m\Omega^2 d = R_1 \quad \left(a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \right)$$

$$0 = R_2$$

$$0 = R_3 + N - mg$$



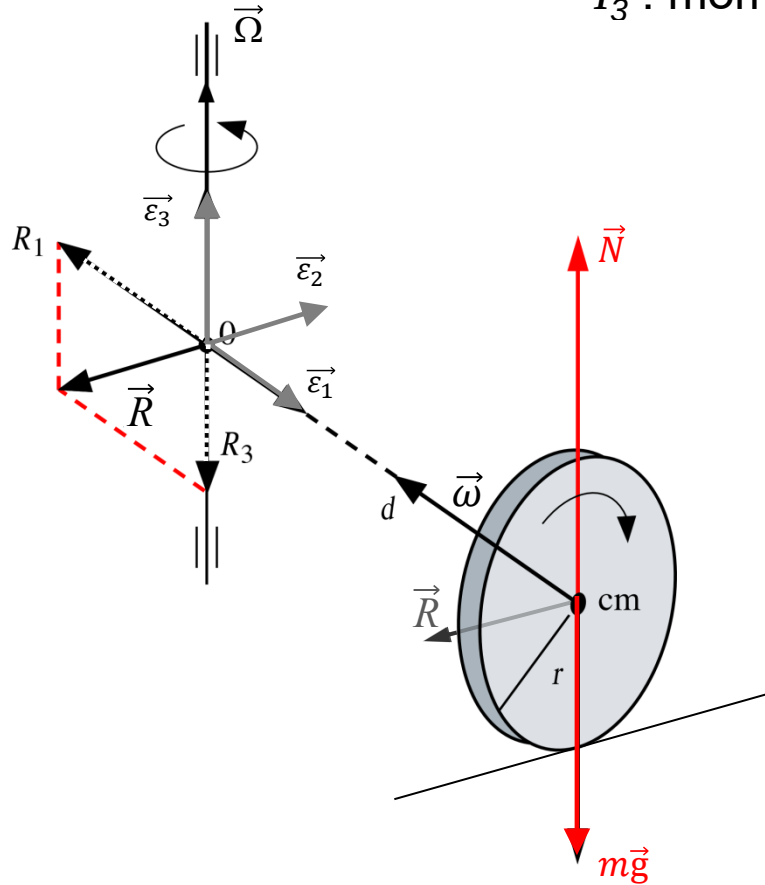
11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Roue en rotation autour d'un axe : la meule

I_1 : moment d'inertie pour la rotation de la roue autour de ε_1 (on néglige la tige)

I_3 : moment d'inertie pour la rotation de la roue autour de ε_3 (on néglige la tige)



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O,i}$$

$$\text{et } \vec{L}_O = -I_1 \omega \vec{\varepsilon}_1 + I_3 \Omega \vec{\varepsilon}_3$$

$$\dot{\vec{L}}_O = -I_1 \omega \dot{\vec{\varepsilon}}_1 = -I_1 \omega \vec{\Omega} \times \vec{\varepsilon}_1 = -I_1 \omega \Omega \vec{\varepsilon}_2$$

Forces extérieures pour le système “tige+roue” : $\vec{N}$ et $m\vec{g}$
($\vec{R}$ est ici une force interne)

$$\vec{M}_O = d\vec{\varepsilon}_1 \times N\vec{\varepsilon}_3 + d\vec{\varepsilon}_1 \times (-mg)\vec{\varepsilon}_3$$

$$\vec{M}_O = (mg - N)d\vec{\varepsilon}_2$$

$$\Rightarrow -I_1 \omega \Omega \vec{\varepsilon}_2 = (mg - N)d\vec{\varepsilon}_2$$

$$N = mg + I_1 \frac{\omega \Omega}{d}$$

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Roue en rotation autour d'un axe : la meule

La distance parcourue pour un tour complet est $2\pi d$

La roue a quant à elle parcouru la distance $2\pi r \times \underbrace{\frac{T}{\tau}}_{\text{nombre de tours}} = 2\pi r \times \frac{\omega}{\Omega}$

$$\text{d'où } 2\pi d = 2\pi r \times \frac{\omega}{\Omega}$$

et nous trouvons finalement la relation $\omega r = \Omega d$

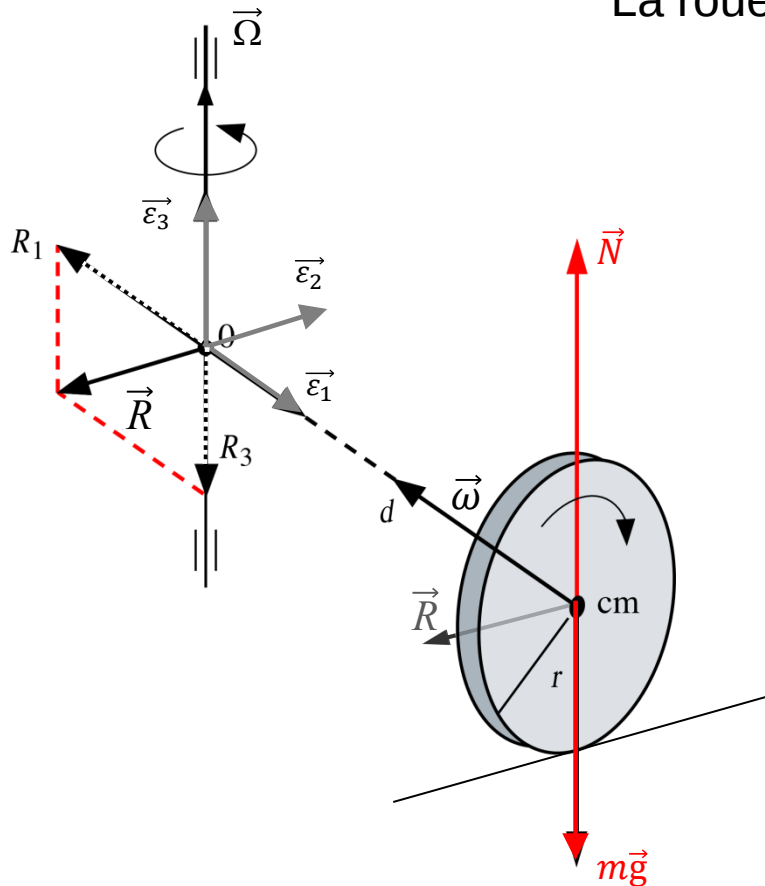
$$\text{avec } I_1 = \frac{1}{2}mr^2$$

$$N = m \left(g + \frac{1}{2}r\Omega^2 \right)$$

La force exercée par la roue sur le sol est supérieure au poids de celle-ci

$$\Omega = \frac{2\pi}{1s}, \quad r = 0.5 \text{ m}$$

$$N = m (9.81 \text{ m/s}^2 + \pi^2 \text{ m/s}^2) \text{ soit } 2 \times \text{le poids}$$

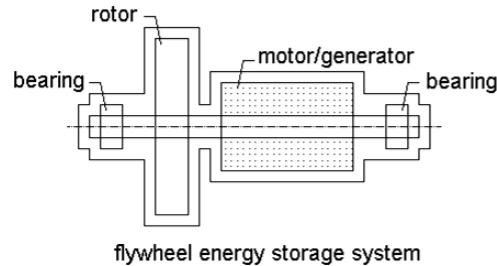


11.3. Moment d'inertie : exemples et applications



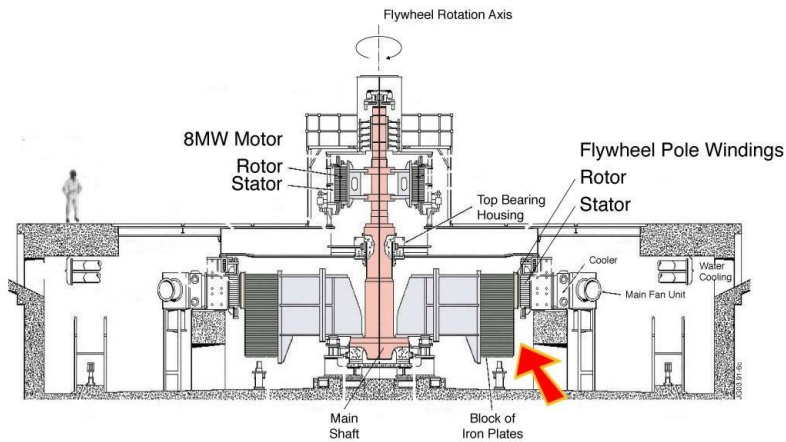
■ Application : stockage de l'énergie

Il est possible de stocker une quantité d'énergie considérable dans un corps solide en rotation



Soit un cylindre de rayon 1,5 m, de longueur 2 m,
et de masse volumique $\rho = 10^4 \text{ kg/m}^3$
et qui ralentit de 5000 t/min à 3000 t/min en 1 minute

La puissance générée est de 232 MW (Ville de Lausanne 100-250 MW)



Roue d'inertie « flywheel » utilisée au réacteur de fusion européen JET (UK) pour amorcer le plasma
⇒ très grande puissance électrique fournie en couplant la roue à un générateur électrique.

La roue fait 9 m de diamètre et sa masse est de 775 t Moment d'inertie: 13,5 million kg.m^2



11.3. Moment d'inertie : exemples et applications

■ Application : stockage de l'énergie

Kinetic Energy Recovery System (KERS)

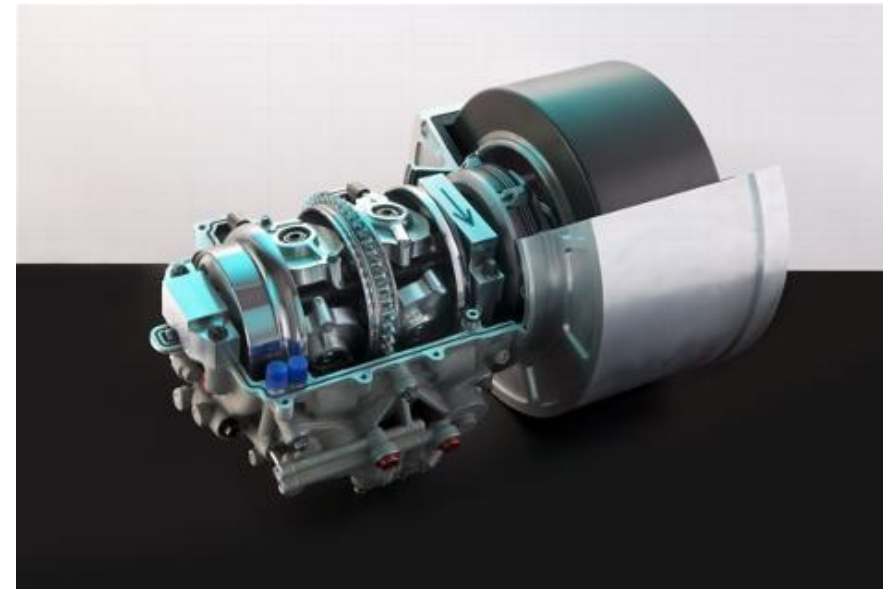
Autorisé sur les voitures de course F1



$\omega = 80\,000$ tour/minute

Energie stockée max = 400 kJ

Puissance max = 60 kW

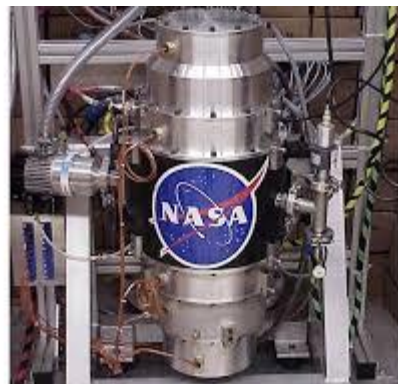
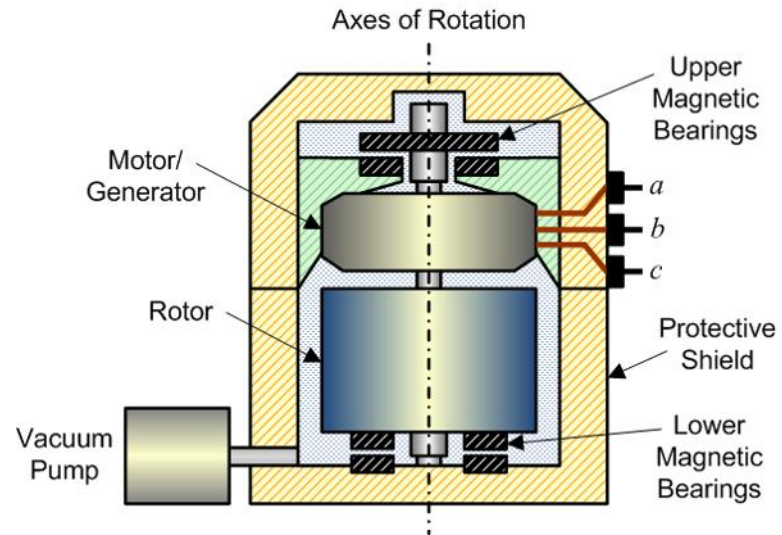


Source : Flybrid Automotive Limited

11.3. Moment d'inertie : exemples et applications



■ Application : stockage de l'énergie



satellite



station de stockage